

Über Relationen zwischen *m*- und *p*-Funktionen

INAUGURAL-DISSERTATION

zur Erlangung der philosophischen Doktorwürde
vorgelegt der Philosophisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität Basel

von

Karl-Felix Moppert

aus Basel

Basel 1949

Buchdruckerei E. Birkhäuser & Cie. AG.

Über Relationen zwischen *m*- und *p*-Funktionen

INAUGURAL-DISSERTATION

zur Erlangung der philosophischen Doktorwürde
vorgelegt der Philosophisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität Basel

von

Karl-Felix Moppert

aus Basel

Basel 1949

Buchdruckerei E. Birkhäuser & Cie. AG.

Genehmigt von der Philosophisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
auf Antrag der

Herren Professoren Dr. A. OSTROWSKI und Dr. A. SPEISER

Basel, den 1. Juli 1948

Prof. Dr. M. FIERZ,
Dekan



Separatabdruck aus den
„Verhandlungen der Naturforschenden Gesellschaft in Basel“
Band LX, 1949.

Über Relationen zwischen m - und p -Funktionen.

Von Karl-Felix Moppert.

Einleitung.

Wir nennen im folgenden eine Funktion von z , die für $|z| < 1$ regulär ist und dort die Werte 0 und 1 nicht annimmt, eine p -Funktion.

Sind weiter v_0 und v_1 zwei ganze Zahlen > 1 , so nennen wir eine Funktion von z , die für $|z| < 1$ regulär ist, und die dort den Wert 0 nur in durch v_0 , den Wert 1 nur in durch v_1 teilbarer Mehrfachheit annimmt, eine m -Funktion mit den charakteristischen Indizes v_0 und v_1 .

Nimmt die Funktion m den Wert 0 überhaupt nicht an, so sagen wir $v_0 = \infty$. Die entsprechende Bedeutung hat $v_1 = \infty$. Die p -Funktion kann dann offenbar als m -Funktion mit $v_0 = v_1 = \infty$ aufgefasst werden.

Die vorliegende Dissertation beschäftigt sich zunächst mit der folgenden Frage:

Für welche Zahlenpaare v_0, v_1 gibt es im folgenden Sinne zwischen der zugehörigen m -Funktion und der p -Funktion eine Relation

$$m = \frac{G(p)}{H(p)}, \quad (\alpha)$$

wo G und H teilerfremde Polynome in p bedeuten:

1. Setzt man für p irgendeine p -Funktion $p^*(z)$ ein, so wird die Funktion $m^*(z) = m[p^*(z)]$ eine m -Funktion.

2. Setzt man für m irgendeine m -Funktion $m^*(z)$ ein, so wird jede der durch Auflösung der Relation (α) entstehenden Funktionen $p^*(z) = p[m^*(z)]$ eine p -Funktion.

Den Anstoss zu dieser Frage gibt die von Herrn OSTROWSKI angegebene Relation

$$m(z) = \frac{4}{27} \cdot \frac{[p^2(z) - p(z) + 1]^3}{p^2(z) [1 - p(z)]^2}, \quad (\text{I})$$

die den Bedingungen 1 und 2 genügt, wenn unter m eine m -Funktion mit den charakteristischen Indizes $v_0 = 3$, $v_1 = 2$ verstanden wird¹⁾.

Die Relation (I) wird am betreffenden Orte mit Hilfe entsprechender Modulfunktionen hergeleitet; Herr OSTROWSKI deutet indessen darauf hin, dass sie „auch elementar nicht schwer zu beweisen“ sei. Davon ausgehend, wurde das angegebene Problem hier ganz elementar gelöst.

Es zeigt sich, dass eine Relation der Form (α) dann und nur dann besteht, wenn die charakteristischen Indizes die folgenden Werte aufnehmen:

$$\begin{array}{ll} \text{A. } v_0 = 3, v_1 = 2; & \text{B. } v_0 = 4, v_1 = 2; \\ \text{C. } v_0 = v_1 = 3; & \text{D. } v_0 = 2, v_1 = \infty \\ & \text{E. } v_0 = v_1 = \infty. \end{array}$$

Hier können die Zahlen v_0 und v_1 natürlich noch überall vertauscht werden.

Im Falle A. bezeichnen wir die m -Funktion mit $m_1(z)$, in den Fällen B., C. und D. beziehungsweise mit $m_2(z)$, $m_3(z)$ und $m_4(z)$.

In den Fällen A. und B. bestehen sogar genau zwei „wesentlich verschiedene“ solche Relationen, dagegen in den Fällen C. und D. nur eine.

Von der allgemeineren Frage, die sich ergibt, wenn man statt der Relation (α) eine Relation $P(p, m) = 0$ betrachtet, wo P ein Polynom in m und p bedeutet, konnte hier nur noch der Fall $p = G(m)/H(m)$ behandelt werden, wo G und H Polynome in m sind. Es zeigt sich, dass hier $v_0 = v_1 = \infty$ gelten muss.

Wir bezeichnen mit $\Omega_v[m_v(0), r]$ ($v = 0, \dots, 4$) die obere Grenze von $|m_v(z)|$ für $|z| \leq r$ für alle m_v -Funktionen, die im Nullpunkt den Wert $m_v(0)$ annehmen. (In diesem Zusammenhang bezeichnen wir die p -Funktion mit $m_0(z)$.) Dann kann nach Herrn OSTROWSKI¹⁾ der SCHOTTKYSche Satz in der folgenden asymptotischen Abschätzung ausgesprochen werden:

¹⁾ A. OSTROWSKI, Asymptotische Abschätzung des absoluten Betrages einer Funktion, die die Werte 0 und 1 nicht annimmt, Comm. Math. Helv., vol. 5, fasc. 1 et 2.

Es gilt

$$16 \Omega_0[m_0(0), r] \sim [16 |m_0(0)|]^{(1+r)/(1-r)} \quad (\text{II})$$

für $|m_0(0)| \uparrow \infty$, gleichmässig in r .

Die entsprechende Abschätzung für die m_1 -Funktion lautet nach Herrn OSTROWSKI¹⁾:

Es gilt

$$12^3 \Omega_1[m_1(0), r] \sim [12^3 |m_1(0)|]^{(1+r)/(1-r)} \quad (\text{III})$$

für $|m_1(0)| \uparrow \infty$, gleichmässig in r .

Diese beiden Abschätzungen ermöglichen uns, mit Hilfe der gefundenen Relationen eine entsprechende Abschätzung für die m_2 -, die m_3 - und die m_4 -Funktion anzugeben.

Endlich können wir eine nichtasymptotische Schranke, die Herr ROBINSON²⁾ für die p -Funktion angegeben hat, auf die m_4 -Funktion übertragen.

Die vorliegende Arbeit geht auf eine Anregung von Herrn Prof. Dr. A. OSTROWSKI zurück. Sie wurde durch seine Kritik und seine Ratschläge wesentlich gefördert. Ich bin Herrn Professor OSTROWSKI zu grösstem Dank verpflichtet.

§ 1. Notwendige und hinreichende Bedingungen für die Relation α .

Um diese Bedingungen aufstellen zu können, schicken wir voraus, dass wir zu jedem Zahlenwert P_0 , der von 0 und 1 verschieden ist, auf elementare Weise eine p -Funktion $p^*(z)$ konstruieren können, die den Wert P_0 im Einheitskreis wirklich annimmt. Wir setzen nämlich $p^*(z) = P_0 + \varepsilon z$, mit $|P_0| > \varepsilon$ und $|P_0 - 1| > \varepsilon$.

Ebenso können wir zu jeder endlichen Zahl M_0 eine m -Funktion $m^*(z)$ konstruieren, die den Wert M_0 im Einheitskreis wirklich annimmt. Ist $M_0 \neq 0$ und $\neq 1$, so setzen wir wieder $m^*(z) = M_0 + \varepsilon z$ mit $\varepsilon < |M_0|, |M_0 - 1|$; ist $M_0 = 0$, so setzen wir $m^* = \varepsilon z^{\nu_0}$ und wählen ε so klein, dass die Funktion m^* den Wert 1 im Einheitskreis überhaupt nicht annimmt, und ist endlich $M_0 = 1$, so setzen wir $m^*(z) = \varepsilon (1 - z)^{\nu_1}$ und wählen ε so klein, dass m^* im Einheitskreis nicht verschwindet.

Nun muss offenbar erfüllt sein die

Bedingung I: Der Grad von G ist grösser als der Grad von H .

Denn andernfalls strebt für $p \rightarrow \infty$ der zugehörige Wert von m nach einem endlichen Wert M_0 . Bilden wir dann die

¹⁾ Siehe Anmerkung 1 auf Seite 62.

²⁾ R. M. ROBINSON, On Numerical Bounds in Schottkys Theorem, Bull. A.M.S. 1939, p. 907.

m -Funktion m^* , die den Wert M_0 wirklich annimmt, so hat mindestens einer der Zweige von $p^*(z) = p[m^*(z)]$ bei $m = M_0$ einen Pol.

Bedingung 2: Es gilt $H(p) = kp^\alpha (1 - p)^\beta$ mit $k \alpha \beta \neq 0$, $\alpha, \beta > 0$, ganz.

H kann keine von 0 und 1 verschiedene Nullstelle haben. Denn sonst können wir eine p -Funktion konstruieren, derart, dass $H[p(z)]$ im Einheitskreis einmal verschwindet. Dann hat aber die zugehörige m -Funktion an jener Stelle einen Pol. Andererseits muss $H(p)$ für $p = 0$ verschwinden. Denn sonst wären (0) endlich, und zu einer m -Funktion $m^*(z)$, die diesen Wert $m(0)$ wirklich annimmt, würde eine p -Funktion $p[m^*(z)]$ gehören, die an einer Stelle den Wert 0 annimmt. Ebenso schliessen wir, dass $H(1) = 0$ sein muss.

Bedingung 3: Es gilt $G = (g_0)^{v_0}$, wo g_0 ein Polynom in p ist.

Ist P_0 eine Nullstelle von G , so konstruieren wir eine p -Funktion $p^*(z)$, die den Wert P_0 annimmt. Die Funktion $m^*(z) = m[p^*(z)]$ verschwindet für $p = P_0$ und muss diese Nullstelle in durch v_0 teilbarer Mehrfachheit annehmen. Also muss G den Faktor $p - P_0$ in einer durch v_0 teilbaren Potenz enthalten.

Bedingung 4: Es gilt $G - H = (g_1)^{v_1}$, wo g_1 ein Polynom in p ist.

Wir wenden dieselbe Schlussweise auf das Polynom $G - H$, dessen Nullstellen die Einsstellen von m liefern, an.

Ersetzen wir in der Identität $G - (G - H) = H$ diese Ausdrücke entsprechend den Bedingungen 2, 3 und 4, so folgt die Relation

$$(g_0)^{v_0} - (g_1)^{v_1} = kp^\alpha (1 - p)^\beta \text{ mit } k \alpha \beta \neq 0, \alpha, \beta > 0, \text{ ganz. (1,1)}$$

1. Folgerung: Die Polynome g_0 und g_1 sind teilerfremd. Dies ergibt sich ohne weiteres, wenn wir bedenken, dass $G = (g_0)^{v_0}$ mit $H = kp^\alpha (1 - p)^\beta$ teilerfremd vorausgesetzt ist.

2. Folgerung: Ist n_0 der Grad von g_0 und n_1 der Grad von g_1 , so gilt

$$n_0 v_0 = n_1 v_1 > \alpha + \beta. \quad (1,2)$$

Beweis: Nach Bedingung 1 ist $\alpha + \beta < n_0 v_0$. Hieraus folgt die Behauptung

Bedingung 5: Die Gleichung $G'H - H'G = 0$ darf ausser den Nullstellen von H nur die Nullstellen von G und diejenigen von $G - H$ als Wurzeln haben.

*) Differentiation nach p .

Zum Beweis beachten wir, dass

$$m' = \frac{G'H - H'G^*}{H^2}$$

gewiss dann verschwindet, wenn der Zähler dieses Ausdrucks verschwindet, der Nenner aber von 0 verschieden ist. Ist jetzt $m'(P_0) = 0$, aber $m(P_0) = M_0$ ein von 0 und 1 verschiedener endlicher Wert, so bilden wir wieder eine m -Funktion m^* , die den Wert M_0 im Einheitskreis einfach annimmt. Dann ist jener Zweig der Funktion $p^* = p(m^*)$, für den $p(M_0) = P_0$ gilt, an jener Stelle sicher nicht regulär. Damit ist die Notwendigkeit der Bedingung 5 bewiesen.

Bedingung 6: Die Polynome g_0 und g_1 haben nur einfache Nullstellen.

Es sei nämlich P_0 eine v -fache Nullstelle von g_0 . Dann gilt für $p = P_0 + h$ wegen $G(p) = [g_0(p)]^{v_0}$ in ihrer Umgebung

$$\frac{G(p)}{H(p)} = A_0 h^{v_0} + A_1 h^{v_0+1} + \dots = A_0 h^{v_0} (1 + A_1 h + \dots) \quad (A_0 \neq 0) \quad (1,3)$$

Es sei weiter Z_0 eine Nullstelle von $m(z)$. Diese Nullstelle wird nach Voraussetzung in durch v_0 teilbarer Vielfachheit angenommen. In ihrer Umgebung können wir also $m(z)$ wie folgt entwickeln:

$$m(Z_0 + k) = B_0 k^{nv_0} + B_1 k^{nv_0+1} + \dots = B_0 k^{nv_0} (1 + B_1 k + \dots) \quad (B_0 \neq 0, n \geq 1, \text{ ganz}). \quad (1,4)$$

Wir ordnen nun der Stelle $z = Z_0$ die Stelle $p = P_0$ zu, d. h. wir setzen diese beiden Entwicklungen einander gleich:

$$B_0 k^{nv_0} (1 + B_1 k + \dots) = A_0 h^{v_0} (1 + A_1 h + \dots). \quad (1,5)$$

Ziehen wir hier die v_0 -te Wurzel, so folgt

$$b_0 k^n (1 + b_1 k + \dots) = a_0 h^v (1 + a_1 h + \dots). \quad (1,6)$$

Ist jetzt $v = 1$, so ist durch diese Darstellung h in der Umgebung von $k = 0$ als reguläre Funktion von k definiert, und somit ist wegen $z = Z_0 + k, p = P_0 + h$ auch p in der Umgebung von Z_0 eine reguläre Funktion von z .

Ist aber $v > 1$, so setzen wir in (1,6) $n = 1$, d. h. wir wählen eine m -Funktion, die den Wert 0 genau v_0 -fach annimmt. Dann ist die Funktion $h(k)$ in der Umgebung von $k = 0$ nicht mehr regulär, und damit ist auch die Funktion $p(z)$ bei $z = Z_0$ nicht regulär, was nicht sein darf.

Ebenso schliessen wir für die Nullstellen der Funktion $m - 1 = (g_1)^{v_1}/H$ und haben so die Notwendigkeit der Bedingung 6 bewiesen.

Wir behaupten nun, dass für die Relation α die Bedingungen 1–6 auch hinreichend sind.

Beweis: Ist $p^*(z)$ irgendeine p -Funktion, so ist die Funktion $m[p^*(z)]$ wegen Bedingung 2 im Einheitskreis regulär. Ihre Nullstellen befinden sich wegen Bedingung 1 bei den Nullstellen von $G(p)$, diese werden wegen Bedingung 3 alle in durch v_0 teilbarer Mehrfachheit angenommen. Wegen Bedingung 4 werden die Einsstellen alle in durch v_1 teilbarer Mehrfachheit angenommen, also ist $m[p^*(z)]$ eine m -Funktion.

Ist $m^*(z)$ irgendeine m -Funktion, so ist wegen Bedingung 5 jeder Zweig der Funktion $p[m^*(z)]$ überall regulär, wo $m^*(z)$ von 0 und 1 verschieden ist. Wegen Bedingung 6 ist aber $p[m^*(z)]$ auch an diesen Stellen regulär. Also ist $p[m^*(z)]$ im Einheitskreis überall regulär. Nach Bedingung 2 gehört aber zu keinem endlichen m -Wert einer der p -Werte 0 und 1. Also ist $p[m^*(z)]$ eine p -Funktion, und die Behauptung ist bewiesen.

§ 2. Herleitung der Wertsysteme $v_0, v_1; n_0, n_1$.

Wir setzen in der Identität $G'H - H'G = (G' - H')H - (G - H)H'$ für $G, G - H$ und H die entsprechenden Ausdrücke ein. Dann folgt, wenn wir die Bezeichnungen

$$p(1 - p) = s; \quad \alpha - p(\alpha + \beta) = t$$

eingeführen, nach Division durch $k p^{\alpha-1} (1 - p)^{\beta-1}$

$$g_0^{v_0-1} (s v_0 g_0' - t g_0) = g_1^{v_1-1} (s v_1 g_1' - t g_1).$$

Da die Polynome g_0 und g_1 teilerfremd sind, folgt, dass die Relationen

$$v_0 s g_0' - t g_0 = a_1 g_1^{v_1-1} \quad (2,1)$$

$$v_1 s g_1' - t g_1 = a_0 g_0^{v_0-1} \quad (2,2)$$

bestehen müssen, wo a_0 und a_1 Polynome in p sind.

Multiplizieren wir die erste dieser Relationen mit $g_0^{v_0-1}$ und die zweite mit $g_1^{v_1-1}$, so folgt nach Subtraktion

$$\begin{aligned} 0 &= s (v_0 g_0^{v_0-1} g_0' - v_1 g_1^{v_1-1} g_1') - t (g_0^{v_0} - g_1^{v_1}) \\ &= (a_1 - a_0) g_0^{v_0-1} g_1^{v_1-1}. \end{aligned}$$

Es muss also $a_0 = a_1 = a$ sein.

Die Polynome s und t sind wegen $\alpha \beta \neq 0$ teilerfremd. Somit kann a weder den Faktor p noch den Faktor $1 - p$ ent-

halten. a kann aber auch mit g_0 nicht einen gemeinsamen Teiler haben, da nach Bedingung 6 g_0 mit g_0' teilerfremd ist. Ebenso kann a auch mit g_1 nicht einen gemeinsamen Teiler haben.

Da nun der Ausdruck $G'H - H'G$ verschwindet, wenn a verschwindet, folgt hieraus

Folgerung: In den Relationen (2,1) und (2,2) gilt $a_0 = a_1 = a = \text{const.}$

Gilt andererseits $a_0 = a_1 = a = \text{const.}$, so ist die Bedingung 5 von selbst erfüllt. Denn dann gilt

$$G'H - H'G = kp^{\alpha-1} (1-p)^{\beta-1} g_0^{v_0-1} a g_1^{v_1-1}.$$

Ausserdem ist dann zugleich mit den Bedingungen 2—4 die Bedingung 6 erfüllt, denn hätte g_0 mit g_0' einen gemeinsamen Teiler, so wäre das auch ein Teiler von g_1 .

Die höchste Potenz von p , die auf der linken Seite der Relation (2,1) auftritt, ist offenbar $n_0 + 1$; der Koeffizient dieses Gliedes ergibt sich nach Division durch eine Konstante zu $-v_0 n_0 + \alpha + \beta$. Nach (1,2) ist dies von 0 verschieden, somit folgt durch Gradvergleich in (2,1) und ebenso in (2,2)

$$n_0 + 1 = n_1 (v_1 - 1) \quad (2,3)$$

$$n_1 + 1 = n_0 (v_0 - 1). \quad (2,4)$$

Beachten wir, dass hier die Zahlen v_0 und v_1 je mindestens gleich 2 sind, so folgen die Ungleichungen $n_0 + 1 \geq n_1$; $n_1 + 1 \geq n_0$ und hieraus

$$|n_0 - n_1| \leq 1. \quad (2,5)$$

Sei zunächst $n_0 < n_1$, also $n_1 = n_0 + 1$. Setzen wir dies in (2,3) ein, so folgt $v_1 = 2$.

Aus (2,4) folgt aber

$$2 = n_0 (v_0 - 2). \quad (2,6)$$

Wir haben also unter der Voraussetzung $n_0 < n_1$ die folgenden Möglichkeiten:

$$\text{A. } n_0 = 2, v_0 = 3, n_1 = 3, v_1 = 2;$$

$$\text{B. } n_0 = 1, v_0 = 4, n_1 = 2, v_1 = 2.$$

Ist andererseits $n_0 = n_1 = n$, also wegen $n_0 v_0 = n_1 v_1$ auch $v_0 = v_1 = v$, so folgt aus (2,3): $1 = n(v - 2)$, somit ist jetzt

$$\text{C. } n_0 = n_1 = 1, v_0 = v_1 = 3.$$

§ 3. Konstruktion der Relation α in den Fällen A, B und C.

Fall A.: $n_0 = 2$, $v_0 = 3$, $n_1 = 3$, $v_1 = 2$; $m = m_1$.

Benützen wir die Abkürzungen s und t aus § 2, so lauten die Gleichungen (2,1) und (2,2):

$$a g_1 = t g_0 - 3 s g_0' \quad (3,1)$$

$$a g_0^2 = t g_1 - 2 s g_1', \quad (3,2)$$

wo a eine Konstante bedeutet. Die Gleichung (1,1) lautet jetzt

$$g_0^3 - g_1^2 = k p^\alpha (1 - p)^\beta, \quad \alpha + \beta < 6 \quad (3,3)$$

Die Glieder 6. Grades müssen sich hier links wegheben. Wir können also annehmen, dass in g_0 das Glied p^2 bzw. in g_1 das Glied p^3 den Koeffizienten 1 hat.

Bilden wir Kongruenzen mod. s , so folgt, wenn wir (3,1) mit t und (3,2) mit a multiplizieren und subtrahieren

$$a^2 g_0 \equiv t^2 \equiv p (\beta^2 - \alpha^2) + \alpha^2. \quad (3,4)$$

Nach (3,1) ist $t g_0 \equiv a g_1$, also

$$a^3 g_1 \equiv t^3 \equiv -p (\alpha^3 + \beta^3) + \alpha^3. \quad (3,5)$$

Da wir den Grad von g_0 bzw. g_1 und die höchsten Koeffizienten kennen, folgt

$$a^2 g_0 = a^2 p^2 - (\alpha^2 - \beta^2 + a^2) p + \alpha^2 \quad (3,6)$$

$$a^3 g_1 = a^3 p^3 - (a^3 - q) p^2 - (\alpha^3 + \beta^3 + q) p + \alpha^3, \quad (3,7)$$

wo q eine Konstante bedeutet.

Diese Ausdrücke setzen wir in (3,1) ein, nachdem wir diese Gleichung mit a^2 multipliziert haben. Dann folgt durch Vergleich des Koeffizienten bei p nach leichter Rechnung

$$q = (\alpha^2 - \beta^2) (\alpha + \beta - 3) + a^2 (\alpha - 3). \quad (3,8)$$

Vergleich des Koeffizienten bei p^2 liefert

$$q = (\alpha^2 - \beta^2) (\alpha + \beta - 3) + a^2 (2\alpha + \beta + a - 9) \quad (3,9)$$

Somit wegen $a \neq 0$:

$$a = 6 - (\alpha + \beta). \quad (3,10)$$

Setzen wir (3,6) und (3,7) in (3,2) ein, nachdem wir diese Gleichung mit a^3 multipliziert haben, so folgt durch Vergleich des Koeffizienten bei p^3

$$a^2 [2 (\alpha^2 - \beta^2) + a (2a + 2\alpha + \beta - 10)] = q (\alpha + \beta - 4). \quad (3,11)$$

Ersetzen wir hier a und q entsprechend $(3, 10)$ und $(3, 8)$, so folgt

$$(\alpha - \beta)(\alpha + \beta - 6)^2(\alpha + \beta + 5) = (\alpha^2 - \beta^2)(\alpha + \beta - 3)(\alpha + \beta - 4).$$

Diese Gleichung ist erfüllt für $\alpha = \beta$. Ist aber $\alpha \neq \beta$, so dividieren wir durch $\alpha - \beta$ und setzen $\alpha + \beta = x$. Dann folgt

$$(6 - x)^2(x + 5) = x(x - 3)(x - 4).$$

Für uns kommen nur ganzzahlige Lösungen $1 < x < 6$ in Frage.

Die einzige solche Lösung ist

$$x = \alpha + \beta = 5.$$

Setzen wir aber $\alpha = 2$, $\beta = 3$ oder $\alpha = 3$, $\beta = 2$, so sehen wir, dass sich dann in $(3, 3)$ die linearen Glieder nicht wegheben.

Wir haben also die folgenden 4 Möglichkeiten:

1. $\alpha = \beta = 1$, $a = 4$, $q = -32$;
2. $\alpha = \beta = a = 2$, $q = -4$;
3. $\alpha = 1$, $\beta = 4$, $a = 1$, $q = -32$;
4. $\alpha = 4$, $\beta = 1$, $a = 1$, $q = 31$.

Im Falle 1 ergibt sich aus den Gleichungen $(3, 6)$ und $(3, 7)$: $16 g_0 = 16 p^2 - 16 p + 1$; $64 g_1 = 64 p^3 - 96 p^2 + 30 p + 1$, und aus $(3, 3)$: $(16 g_0)^3 - (64 g_1)^2 = 108 p(p - 1)$, also

$$m_1 = \frac{(16 p^2 - 16 p + 1)^3}{108 p(p - 1)}. \quad (\text{A } 1)$$

Im Falle 2 folgt entsprechend: $4 g_0 = 4 p^2 - 4 p + 4$, $8 g_1 = 8 p^3 - 12 p^2 - 12 p + 8$, $(4 g_0)^3 - (8 g_1)^2 = 432 p^2(p - 1)^2$, also

$$m_1 = \frac{4}{27} \frac{(p^2 - p + 1)^3}{p^2(1 - p)^2}. \quad (\text{A } 2)$$

Im Falle 3 folgt: $g_0 = p^2 + 14 p + 1$, $g_1 = p^3 - 33 p^2 - 33 p + 1$, $g_0^3 - g_1^2 = 108 p(p - 1)^4$, also

$$m_1 = \frac{(p^2 + 14 p + 1)^3}{108 p(p - 1)^4}. \quad (\text{A } 3)$$

Im Falle 4 endlich: $g_0 = p^2 - 16 p + 16$, $g_1 = -p^3 - 30 p^2 + 96 p - 64$, $g_0^3 - g_1^2 = 108 p^4(1 - p)$, also

$$m_1 = \frac{(p^2 - 16 p + 16)^3}{108 p^4(1 - p)}. \quad (\text{A } 4)$$

Fall B. $n_0 = 1$; $v_0 = 4$; $n_1 = 2$; $v_1 = 2$; $m = m_2$.

Die Gleichung (1,1) kann in der Form geschrieben werden

$$(g_0^2 + g_1)(g_0^2 - g_1) = k p^\alpha (1 - p)^\beta.$$

Die beiden Faktoren links sind, wie man leicht sieht, teilerfremd.

Sei zunächst $\alpha = \beta = 1$. Dann können wir, da nicht beide Klammern links linear sein können

$$g_0^2 + g_1 = k_1 p (1 - p); \quad g_0^2 - g_1 = k_2; \quad k_1 k_2 = k$$

setzen. Es folgt $g_0^2 = \frac{1}{2} [k_2 + k_1 p (1 - p)]$. Damit dieser Ausdruck das Quadrat eines linearen Polynoms ist, muss $k_1 = -4 k_2$ sein. Dann ist $g_0^2 = \frac{1}{2} k_2 (2p - 1)^2$; $g_1 = \frac{1}{2} k_2 (4p^2 - 4p - 1)$.

$$m_2 = \frac{g_0^4}{k p (1 - p)} = \frac{(2p - 1)^4}{16 p (1 - p)}. \quad (\text{B } 1)$$

Entsprechend gehen wir vor, wenn wir $\alpha = 2$; $\beta = 1$ bzw. $\alpha = 1$; $\beta = 2$ setzen und kommen so zu den Formeln

$$m_2 = \frac{(p+1)^4}{16 p (1-p)^2}; \quad m_2 - 1 = \frac{(p^2 - 6p + 1)^2}{16 p (1-p)^2} \quad (\text{B } 2)$$

$$m_2 = \frac{(p-2)^4}{16 p^2 (1-p)}; \quad m_2 - 1 = \frac{(p^2 + 4p - 4)^2}{16 p^2 (1-p)}. \quad (\text{B } 3)$$

Fall C. $n_0 = n_1 = 1$; $v_0 = v_1 = 3$; $m = m_3$. Wir können wieder annehmen, dass sowohl in g_0 wie in g_1 der Koeffizient von p gleich 1 ist. Da wegen $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\alpha + \beta < 3$ gelten muss: $\alpha = \beta = 1$, lautet die Gleichung (1,1) jetzt

$$(a + p)^3 - (b + p)^3 = k p (1 - p),$$

wo a und b voneinander verschiedene Konstante bedeuten.

Aus Koeffizientenvergleich ergibt sich $a^3 - b^3 = 0$ und $a + b = -1$. Es sind also a und b primitive 3. Einheitswurzeln, und wir kommen so zu den Formeln

$$m_3 = -\frac{i}{3\sqrt{3}} \frac{(\varepsilon_1 + p)^3}{p(1-p)} \quad (\text{C } 1)$$

$$m_3 = -\frac{i}{3\sqrt{3}} \frac{(\varepsilon_2 + p)^3}{p(1-p)}, \quad \varepsilon_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{i}{2} \sqrt{3}. \quad (\text{C } 2)$$

§ 4. Untersuchung der Relation α , wenn für die Zahlen v auch der Wert ∞ zugelassen ist.

Sei zunächst v_0 endlich, $v_1 = \infty$.

Die Bedingungen des § 1 müssen modifiziert werden.

Die Bedingung 1 fällt weg, da der Grad von G gleich jenem von H sein kann, sofern für $p \rightarrow \infty$ dann $m \rightarrow 1$ gilt. In der

Bedingung 2 fällt der Zusatz $\alpha \beta \neq 0$ weg. Die Bedingung 3 kann unverändert übernommen werden. An Stelle der Bedingung 4 haben wir aber

*Bedingung 4**: Es gilt $G - H = p^\gamma (1 - p)^\delta$, $\gamma, \delta \geq 0$, ganz.

Beweis. Die Funktion m kann jetzt den Wert 1 nur für $p = 0, 1$ oder ∞ annehmen, also überhaupt nicht. Es ist aber klar, dass das Polynom $G - H$ keine von 0 und 1 verschiedene Nullstelle haben darf.

Wir haben jetzt also die Gleichung

$$g_0^{v_0} - k p^\alpha (1 - p)^\beta = p^\gamma (1 - p)^\delta. \quad (4,1)$$

Da wir $g_0^{v_0}$ mit $k p^\alpha (1 - p)^\beta$ teilerfremd voraussetzen, ist für $\alpha > 0$ $g_0 \nmid p^*$. Ist aber $\alpha = 0$, $\gamma > 0$, so muss wegen $k (1 - p)^{\beta + \gamma}$ auch $g_0 \nmid p$ sein. Ist endlich $\alpha = \gamma = 0$, so folgt $g_0^{v_0} = k (1 - p)^\beta + (1 - p)^\delta$. Dieser Ausdruck ist aber höchstens durch p , aber durch keine höhere Potenz von p teilbar. Also müsste jetzt $v_0 = 1$ sein, was uns aber nicht interessiert.

In unsern Fällen ist also $g_0 \nmid p$. Ebenso folgt $g_0 \nmid 1 - p$.

Hieraus folgt, dass $\alpha \gamma = \beta \delta = 0$ gelten muss. Es dürfen aber nicht 3 der Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ verschwinden. Denn gilt etwa $\alpha = \beta = \delta = 0$, so folgt nach Differentiation $v_0 g_0^{v_0-1} g_0' = \gamma p^{\gamma-1}$. Wegen $v_0 > 1$, $g_0 \nmid p$ ist diese Relation unmöglich.

Wir untersuchen zunächst den Fall

$\alpha = \beta = 0$, $\gamma, \delta \neq 0$. Durch Differentiation folgt $v_0 g_0^{v_0-1} g_0' = p^{\gamma-1} (1 - p)^{\delta-1} [\gamma - p(\gamma + \delta)]$. Wegen $g_0 \nmid p$, $g_0 \nmid (1 - p)$ folgt $v_0 = 2$, $g_0 = \gamma - p(\gamma + \delta)$, $\gamma = \delta = 1$,

$$m_4 = (1 - 2p)^2, \quad m_4 - 1 = 4p(1 - p). \quad (D 1)$$

Analog behandeln wir den Fall $\gamma = \delta = 0$, $\alpha, \beta \neq 0$, und erhalten die Formeln

$$m_4 = \frac{(2p-1)^2}{4p(1-p)}, \quad m_4 - 1 = -\frac{1}{4p(1-p)}. \quad (D 2)$$

Ist aber $\alpha = \delta = 0$, so folgt nach Differentiation $v_0 g_0^{v_0-1} g_0' = \gamma p^{\gamma-1} - k \beta (1 - p)^{\beta-1}$, und hieraus zusammen mit der Ausgangsgleichung: $g_0^{v_0-1} [\beta g_0 + v_0 g_0' (1 - p)] = p^{\gamma-1} [\gamma + p(\beta - \gamma)]$. Somit ist $v_0 = 2$, $g_0 = \gamma + p(\beta - \gamma)$, $\gamma \leq 2$, $\beta \neq \gamma$ (da sonst g_0/p folgte). Analog erhalten wir $\beta \leq 2$. Wir haben also die Möglichkeiten $\gamma = 2$, $\beta = 1$ und $\gamma = 1$, $\beta = 2$. Es folgen die Formeln

$$m_4 = \frac{(p-2)^2}{4(1-p)}, \quad m_4 - 1 = \frac{p^2}{4(1-p)} \quad (D 3)$$

$$m_4 = \frac{(1+p)^2}{(1-p)^2}, \quad m_4 - 1 = \frac{4p}{(1-p)^2} \quad (D 4)$$

*) $a \nmid b$ bedeutet: a ist nicht teilbar durch b .

Ist endlich $\beta - \gamma = 0$, so erhalten wir analog die Formeln

$$m_4 = \frac{(1+p)^2}{4p}, \quad m_4 - 1 = \frac{(1-p)^2}{4p} \quad (\text{D } 5)$$

$$m_4 = \frac{(2-p)^2}{p^2}, \quad m_4 - 1 = 4 \frac{1-p}{p^2}. \quad (\text{D } 6)$$

Die 6 hier gefundenen Formeln liefern gewiss zu jeder p -Funktion eine m_4 -Funktion. Die Umkehrung müssen wir aber noch besonders untersuchen.

Die p -Fläche, die durch diese Formeln über der schlichten m_4 -Fläche erzeugt wird, ist in jedem Falle zweiblättrig. In jedem der 6 Fälle hat diese Fläche zwei Verzweigungspunkte, sie liegen immer über zweien der drei Stellen 0, 1 und ∞ . Pole treten nur über $m_4 = 1$ und $m_4 = \infty$ auf.

Da nun eine m_4 -Funktion den Wert 0 nur in gerader Mehrfachheit annimmt und die Werte 1 und ∞ vermeidet, wird in jedem Falle $p(z) = p[m_4(z)]$ regulär.

Schliesslich behandeln wir noch den Fall $v_0 = v_1 = \infty$. Hier geht die m -Funktion in die p -Funktion über. Wir suchen jetzt also eine Relation der Form

$$p^* = \frac{G(p)}{H(p)} \quad (4, 2)$$

derart, dass zu jeder p -Funktion p eine p -Funktion p^* erzeugt wird und umgekehrt.

Die Funktion $p^*(p)$ darf den Wert 0 nur für $p = 0$, $p = 1$ oder $p = \infty$ annehmen. Somit muss die Gleichung (4, 2) in der Form

$$p^* = k p^\alpha (1 - p)^\beta \quad (4, 3)$$

geschrieben werden können, wo α und β irgendwelche positive oder negative ganze Zahlen sind.

Weiter darf die Funktion $p^*(p)$ den Wert 1 nur für $p = 0$, $p = 1$ oder $p = \infty$ annehmen.

Das bedeutet aber, dass die Gleichung $1 = k p^\alpha (1 - p)^\beta$ nur die Lösungen 0, 1 und ∞ haben darf.

Soll $p = 0$ eine Lösung sein, so muss $\alpha = 0$ gelten. Dann ist aber weder $p = 1$ noch $p = \infty$ eine Lösung dieser Gleichung, sie darf also keine andere Lösung ausser $p = 0$ haben. Somit ist dann $k = 1$, $\beta = \pm 1$, und wir erhalten die beiden Relationen

$$p^* = 1 - p \quad (\text{E } 1)$$

$$p^* = \frac{1}{1 - p}. \quad (\text{E } 2)$$

Soll $p = 1$ eine Lösung sein, so muss β verschwinden, und wir schliessen wie oben, dass dann $k = 1$, $\alpha = \pm 1$ sein muss.

Es folgt

$$p^* = p \quad (\text{E } 3)$$

$$p^* = \frac{1}{p}. \quad (\text{E } 4)$$

Soll endlich $p = \infty$ eine Lösung sein, so muss $k = -1$, $\alpha = -\beta = \pm 1$ gelten und es folgt

$$p^* = \frac{p-1}{p} \quad (\text{E } 5)$$

$$p^* = \frac{p}{p-1}. \quad (\text{E } 6)$$

§ 5. Substitutionen von p .

Vermöge der Relation $m_\nu = R_\nu(p)$ sei jeder p -Funktion eine m_ν -Funktion und jeder m_ν -Funktion eine p -Funktion zugeordnet ($\nu = 1, 2, 3, 4$). Wir ersetzen nun p durch einen der Ausdrücke (E1), ..., (E6): $m_\nu = R_\nu(p^*) = R_\nu^*(p)$. Dann wird auch vermöge der Relation $m_\nu = R_\nu^*(p)$ jeder p -Funktion eine m_ν -Funktion und jeder m_ν -Funktion eine p -Funktion zugeordnet.

Zum Beweis müssen wir nur beachten, dass mit p auch p^* eine p -Funktion ist, und umgekehrt.

Gehen nun zwei der früher gefundenen Relationen durch eine solche p -Substitution ineinander über, so nennen wir sie *nicht wesentlich verschieden*, und im andern Fall *wesentlich verschieden*.

Wir finden nun durch direktes Nachrechnen, dass die Relationen (A1), (A3), (A4) nicht wesentlich verschieden sind, dass aber die Relation (A2) von jeder der ersten wesentlich verschieden und gegenüber allen diesen Substitutionen invariant ist.

Die 3 Relationen B sind nicht wesentlich verschieden, ebenso wenig die beiden Relationen C.

Die Relationen (D1), (D4), (D6) und ebenso die Relationen (D2), (D3), (D5) sind untereinander nicht wesentlich verschieden, während die beiden Tripel voneinander wesentlich verschieden sind.

Wir haben also in den Fällen A und D zwei wesentlich verschiedene Relationen, in den Fällen B und C aber nur eine.

§ 6. Die Relation $p = \frac{G(m)}{H(m)}$.

Wir untersuchen jetzt die Relation

$$p = \frac{G(m)}{H(m)}, \quad (\beta)$$

wo G und H teilerfremde Polynome in m sind. Diese Relation soll wieder die Bedingungen 1. und 2. der Einleitung erfüllen.

Wir bemerken, dass die charakteristischen Indizes v_0 und v_1 der m -Funktion hier nicht beide endlich sein können. Denn sonst sind für die m -Funktion alle endlichen Werte erlaubt, und wir können entsprechend § 1 zu jedem endlichen M_0 eine m -Funktion $m^*(z)$ konstruieren, die den Wert M_0 wirklich annimmt. Also darf jetzt weder G noch H eine endliche Nullstelle besitzen, denn sonst konstruieren wir eine m -Funktion, die diesen Wert wirklich annimmt, und dann wird $p[m(z)] = 0$ bzw. $p[m(z)] = \infty$, was verboten ist.

Sei andererseits $v_0 = \infty$, v_1 endlich. Dann dürfen aus demselben Grund wie vorher die Polynome G und H höchstens $m = 0$ als Nullstelle haben. Da sie teilerfremd sind, ist dann das eine dieser Polynome konstant. Ist H konstant, so haben wir die Relation $p = c m^k$, $k \neq 0$, ganz, $c \neq 0$. Die p -Funktion darf aber auch den Wert 1 nicht annehmen. Die Gleichung $1 = c m^k$ hat aber sicher eine von 0 verschiedene endliche Lösung. Wir können also eine m -Funktion $m^*(z)$ konstruieren, derart, dass an einer Stelle $p[m^*(z)] = 1$ wird, was verboten ist.

Entsprechend schliessen wir in den andern Fällen, die möglich sind, wenn nur eine der Zahlen v_0 und v_1 unendlich ist.

Eine Relation der Form (β) kann also nur für $v_0 = v_1 = \infty$ bestehen. Diesen Fall haben wir aber bereits in § 4 behandelt.

§ 7. Die Relation zwischen den Funktionen m_1 und m_3 .

Aus den Relationen (A2) und (C1) können wir leicht p eliminieren. Es folgt nämlich

$$m_1 = 4 m_3 (1 - m_3). \quad (\text{F})$$

Diese Relation liefert zu jeder m_3 -Funktion eine m_1 -Funktion und zu jeder m_1 -Funktion eine m_3 -Funktion. Denn vermöge (C1) entsteht zu jeder m_3 -Funktion eine p -Funktion, und vermöge (A2) zu jeder p -Funktion eine m_1 -Funktion. Somit muss die Gleichung, die aus diesen beiden Gleichungen durch Elimination von p entsteht, zu jeder m_3 -Funktion eine m_1 -Funktion liefern. Entsprechend beweist man, dass diese Gleichung auch zu jeder m_1 -Funktion eine m_3 -Funktion liefern muss.

§ 8. Übertragung der asymptotischen Abschätzung von Herrn Ostrowski für die Funktion m_0 bzw. m_1 auf die Funktionen m_2 , m_3 und m_4 .

Wir bezeichnen hier der Einheitlichkeit halber die p -Funktion als m_0 -Funktion und benützen den Ausdruck $\Omega_r [m_r(0), r]$ in der in der Einleitung angegebenen Bedeutung.

Aus (F) folgt: $|m_1(z)| \sim 4|m_3(z)|^2$ für $|m_1(z)| \rightarrow \infty$. Damit folgt aus der Formel III der Einleitung:

Es gilt

$$48 \sqrt[3]{\Omega_3[m_3(0), r]} \sim [48 \sqrt[3]{m_3(0)}]^{1+r}$$

für $|m_3(0)| \rightarrow \infty$, gleichmässig in r .

In der Relation (B2) ordnen wir dem Wert $m_2(z)$ den Wert $m_0(z)$ derart zu, dass für $|m_2(z)| \rightarrow \infty$ auch $|m_0(z)| \rightarrow \infty$ gilt. Dann ist $|m_2(z)| \sim 1/16|m_0(z)|$ für $|m_0(z)| \rightarrow \infty$. Damit folgt aus der Formel II der Einleitung:

Es gilt

$$16^2 \Omega_2[m_2(0), r] \sim [16^2 |m_2(0)|]^{1+r}$$

für $|m_2(0)| \rightarrow \infty$, gleichmässig in r .

Aus der Relation (D1) folgt $|m_4(z)| \sim 4|m_0(z)|^2$ für $|m_4(z)| \rightarrow \infty$. Damit ergibt sich aus der Formel II der Einleitung:

Es gilt

$$64 \Omega_4[m_4(0), r] \sim [64 |m_4(0)|]^{1+r}$$

für $|m_4(0)| \rightarrow \infty$, gleichmässig in r .

§ 9. Übertragung der Abschätzung für m_0 von Herrn Robinson auf m_4 .

Für die Grösse $\Omega_0[m_0(0), r]$ ist durch Herrn ROBINSON²⁾ die folgende Abschätzung bekannt

$$16 \Omega_0[m_0(0), r] - 18 < [16 |m_0(0)| + 18]^{\frac{1+r}{1-r}}$$

$$16 \Omega_0[m_0(0), r] + 18 > [16 |m_0(0)| - 18]^{\frac{1+r}{1-r}}$$

für $16 |m_0(0)| - 18 > 0$.

Diese Abschätzung, die die asymptotische Abschätzung für m_0 enthält, können wir mittels der Relation $m_4 = (2m_0 - 1)^2$ auf die Funktion m_4 übertragen.

Es folgt nämlich für

$$|z| \leq r < 1: |m_4| = |2m_0 - 1|^2 \leq (2|m_0| + 1)^2 <$$

$$\left(\frac{[16|m_0(0)| + 18]^{\frac{1+r}{1-r}} + 18}{8} + 1 \right)^2 \quad \left(\frac{[16|m_0(0)| + 18]^{\frac{1+r}{1-r}} + 26}{8} \right)^2$$

Hierin ist $|m_0(0)| \leq \frac{1}{2} (1 + \sqrt{|m_4(0)|})$. Somit gilt für

$$|z| \leq r < 1: \sqrt{|m_4(z)|} < \frac{[8\sqrt{|m_4(0)|} + 26]^{\frac{1+r}{1-r}} + 26}{8}.$$

Andererseits gibt es nach der Abschätzung von Ω_0 nach unten eine m_0 -Funktion $m_0^*(z)$ derart, dass für jedes r für ein

$$|z| \leq r < 1 \text{ gilt: } |m_0^*(z)| > \frac{[16|m_0^*(0)| - 18]^{\frac{1+r}{1-r}} - 18}{16}.$$

Die Funktion $m_4^*(z) = (2m_0^*(z) - 1)^2$ ist dann eine m_4 -Funktion, und es gilt $|m_4^*(z)| \geq (2|m_0^*(z)| - 1)^2 >$

$$\left(\frac{[16|m_0^*(0)| - 18]^{\frac{1+r}{1-r}} - 26}{8} \right)^2.$$

Hierin ist $|m_0^*(0)| \geq \frac{1}{2} (\sqrt{|m_4^*(0)|} - 1)$, somit folgt für

$$8\sqrt{|m_4^*(0)|} - 26 > 0: \sqrt{|m_4(z)|} > \frac{[8\sqrt{|m_4^*(0)|} - 26]^{\frac{1+r}{1-r}} - 26}{8}.$$

Dies liefert die folgende Abschätzung für $\Omega_4(m_4(0), r)$:

$$8\sqrt{\Omega_4[m_4(0), r]} - 26 < [8\sqrt{|m_4(0)|} + 26]^{\frac{1+r}{1-r}},$$

$$8\sqrt{\Omega_4[m_4(0), r]} + 26 > [8\sqrt{|m_4(0)|} - 26]^{\frac{1+r}{1-r}}.$$

Hierin ist die asymptotische Abschätzung für m_4 wieder enthalten.

Curriculum vitae.

Am 7. Oktober 1920 wurde ich, Karl-Felix Moppert, als Sohn des Oscar Moppert, Pfarrer, und seiner Gattin Esther geb. Burekhardt in meiner Heimatstadt Basel geboren.

Im Frühling 1939 legte ich am humanistischen Gymnasium in Basel das Maturitätsexamen ab. Ich studierte während acht Semestern an der Universität Basel, während eines Semesters an der ETH. und während eines Semesters an der Universität Zürich. Mein Hauptfach ist Mathematik, die Nebenfächer sind Physik, theoretische Physik und Chemie.

Im Frühjahr 1943 legte ich das Basler wissenschaftliche Mittellehrerexamen in Mathematik, Physik und Chemie und im Herbst 1946 das Basler wissenschaftliche Oberlehrerexamen in Mathematik und Physik ab. Während des Sommerhalbjahrs 1946 assistierte ich bei Herrn Prof. Dr. A. OSTROWSKI.

Im Herbst 1946 verheiratete ich mich mit Iolanda Bianchi aus Chiasso.

Mein Studium wurde durch häufigen Militärdienst und durch eine schwere Krankheit unterbrochen.

In Basel besuchte ich Vorlesungen, Übungen und Praktika bei den Herren Professoren BUCHNER, ERLLENMEYER, FIERZ, HAGENBACH, HUBER, MATTHIES, MIESCHER, OSTROWSKI, RUGGLI und SPIESS und in Zürich bei den Herren Professoren GONSETH, HOPF, KOLLROS, MEYER und WENTZEL. Allen meinen Lehrern bin ich zu Dank verpflichtet.

Meine Dissertation entstand unter der Leitung von Herrn Prof. Dr. A. OSTROWSKI. Für seine Kritik und seine mannigfachen Hinweise, die er mir während des Studiums und besonders bei der Abfassung dieser Arbeit gegeben hat, danke ich ihm aufrichtig.

Basel, im Juni 1948.

Karl-Felix Moppert.

